Del azar benigno al azar salvaje

La noción de azar que utilizan las ciencias es multiforme. Su forma "benigna" no sirve para describir muchos fenómenos naturales. Para comprender la irregularidad hay que recurrir a sus formas "salvajes"

Benoît Mandelbrot

La gama de fenómenos naturales y sociales es infinita; las técnicas matemáticas susceptibles de domeñarlas, muy poco numerosas. Ocurre así que fenómenos que nada tienen en común comparten una misma estructura matemática. Esta conclusión filosófica se impuso a mi entendimiento hace treinta años. Mis trabajos sobre la Bolsa estaban próximos a su fin y yo atisbaba estructuras aleatorias muy parecidas en los trabajos que sobre ruidos y sobre turbulencia estaba iniciando entonces. En todos estos casos se trataba de los primeros estadios de la construcción de una geometría fractal.

¿Cuál era, pues, la idea central de mis trabajos sobre finanzas? La idea ambiental, si nos atrevemos a llamarla así, consistía en que los precios son funciones continuas del tiempo y que sus fluctuaciones no son más bruscas que las descritas por la muy clásica distribución de Gauss. El azar al que estas teorías hacían referencia puede muy legítimamente ser calificado de "benigno". Pero el examen de los hechos mostraba lo contrario: funciones discontinuas y fluctuaciones muy bruscas. Pronto hube de concluir que se trataba de una forma de azar muy distinta, que con toda legitimidad podríamos calificar de "salvaje". Me ocuparé aquí de algunas cuestiones filosóficas subyacentes a este enfoque.

BENOÎT MANDELBROT, de familia judía lituana, se formó en la Escuela Politécnica de París. Se trasladó a los Estados Unidos para trabajar en la empresa IBM. Ha dado clases en las universidades de Harvard y Yale, entre otros centros superiores. A él se le debe el término fractal y el desarrollo de la teoría geométrica correspondiente.

Para el profano y para el filósofo la noción de azar es una noción unívoca, cuya unicidad ha quedado además expresada matemáticamente de forma abstracta y muy general. Incluso con demasiada generalidad, como vamos a ver, tanto porque hace tabla rasa de diferencias fundamentales como porque la cimentación que la axiomática proporciona al cálculo de probabilidades diluye su especificidad. La teoría de la probabilidad constituye, de hecho, un capítulo mal diferenciado de la teoría de la medida.

Unificación, abstracción y generalidad han sido las tendencias que han dominando la investigación en el tercer cuarto de este siglo. La matemática francesa no fijaba su interés en las "filigranas" del análisis o de la geometría, sino en sus "estructuras fundamentales". La física se complacía en la búsqueda de partículas fundamentales con el mismo espíritu.

Cierto es que no hay ciencia sino de lo general. Mi dilatada carrera científica ha estado marcada por la identificación y el estudio de una nueva estructura general subyacente a numerosos fenómenos de apariencia heteróclita, estructura que se difunde por las matemáticas y por las ciencias físicas, biológicas y sociales, y que no es otra que la sibisemejanza o, dicho de modo más general, la invariancia por reducción o dilatación; los objetos que caracteriza son los fractales.

Sin embargo, y quizá paradójicamente, la construcción de la geometría fractal me hizo descubrir pronto, y luego me confirmó repetidamente, que la unicidad del mundo de los modelos aleatorios, e incluso la del cálculo de probabilidades, son engañosas. Desde el punto de vista que me interesa, el cálculo de probabilidades ofrece analogías cada vez más inquietantes con la teoría de la materia. La aplicación de leyes generales a contextos heteróclitos revela la existencia de varios "estados" muy distintos. Dos de los estados de la materia han sido conocidos desde siempre; las palabras "sólido" y "líquido" proceden del griego y del latín; "gaseoso" data del siglo XVII. La física es a la vez una y diversa. Manifestación de su unidad es que todos estos estados (y otros posibles, pues se están identificando sin cesar estados nuevos) se deduzcan de unos mismos principios y utilicen unos mismos conceptos, como los de temperatura y presión. Manifestación de su variedad es que los estados de la materia se diferencien de forma muy clara.

He vivido un fenómeno análogo de "diferenciación" en el caso del cálculo de probabilidades. Mi concepción actual del azar le permite adoptar diversos "estados", tan distintos entre sí como lo es un gas de un sólido. Para facilitar su comprensión lo mejor será que reconstruyamos la historia.

Para empezar sopesemos una afirmación que encontramos en la primera página de un tratado famoso, uno de cuyos coautores, Andrei Kolmogoroff, ha sido uno de los matemáticos más ilustres del siglo XX. Fue Kolmogoroff quien aportó a la axiomática del cálculo de probabilidades los últimos toques que la hicieron aceptable para los matemáticos "puros". Ahora bien, el prefacio que Gnedenko y Kolmogoroff escribieron en 1954 declara que "todo el valor epistemológico de la teoría de probabilidades se basa en esto: los fenómenos aleatorios, considerados en su acción colectiva a gran escala, crean una regularidad no aleatoria". El modelo subyacente corresponde al de una sucesión de números obtenidos por lanzamiento de un dado: la proporción de "doses" es muy variable (fenómeno aleatorio) en diez lanzamientos, pero será muy cercana a 1/6 (regularidad no aleatoria) en un gran número de tiradas (a gran escala). Volveremos sobre este asunto. Estoy seguro de que una encuesta entre matemáticos y científicos experimentales mostraría su plena conformidad con la tesis enunciada por Gnedenko y Kolmogoroff. Por desgracia la tesis es ambigua. Su generalizada aceptación es no pocas veces reflejo de un malentendido cuyas consecuencias, muy serias, vivimos a diario.

Precisemos: lo que la tesis antedicha significa para cualquier matemático es que toda acción colectiva posee al menos un aspecto que es, en el límite, regular y no aleatorio. Esto no basta para satisfacer al científico o al ingeniero: ambos tienen que asegurarse de que tal regularidad colectiva y no aleatoria no se refiera a fenómenos que no les interesen. Además, si existe regularidad, quieren asegurarse de que queda establecida con la rapidez suficiente para que los valores asintóticos sean reflejo de la estructura de los sistemas finitos que encontramos en la naturaleza.

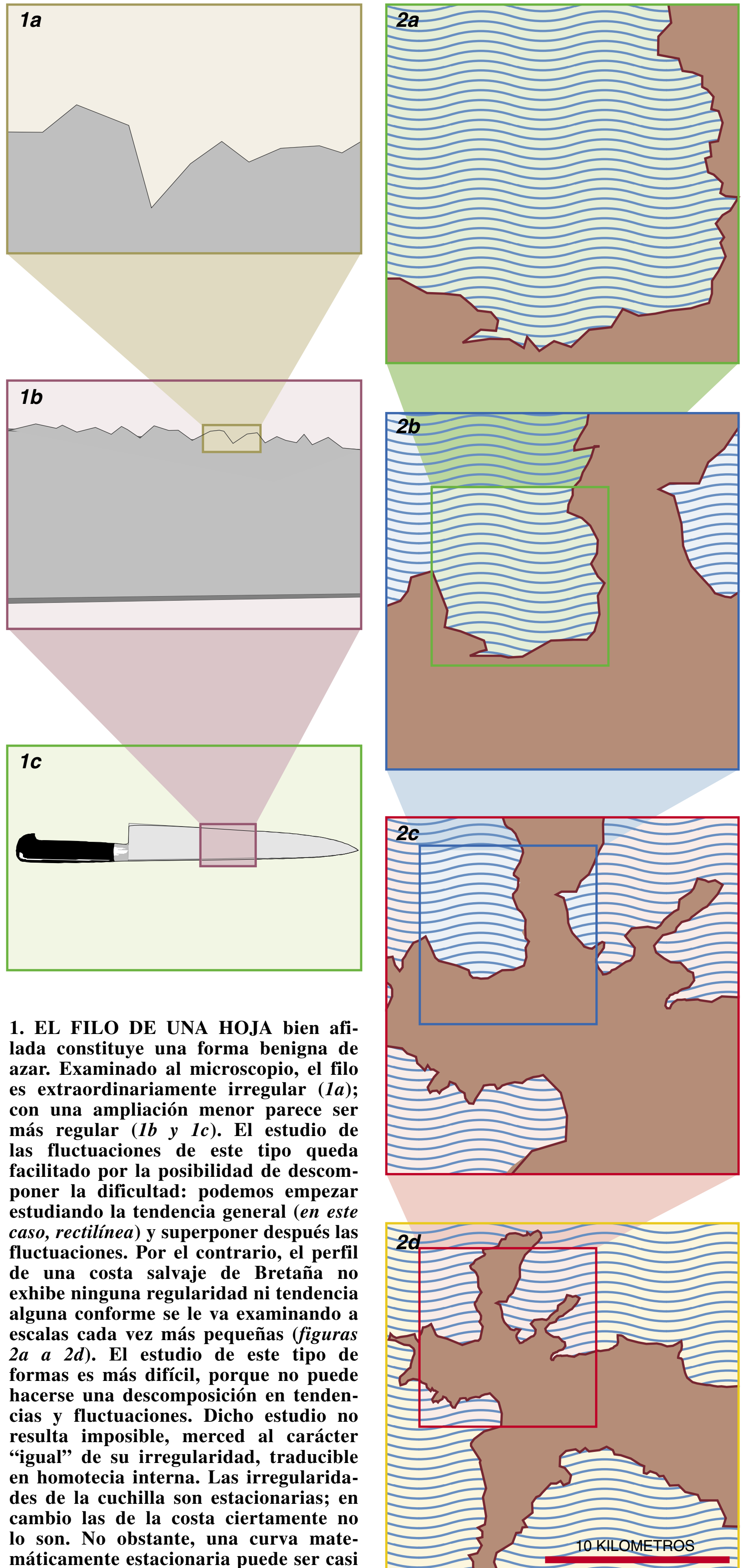
Al filo de la navaja

Sigamos precisando. La modalidad clásica del azar es la correspondiente al dado: cuando el número de observaciones ha aumentado lo suficiente, o cuando la precisión del análisis se torna suficientemente burda, las fluctuaciones aleatorias se neutralizan y muy pronto resultan relativamente insignificantes.

La vida ordinaria nos proporciona el ejemplo del filo de una navaja bien afilada: aunque a simple vista parezca perfectamente recto, ofrece un aspecto en extremo irregular al microscopio. La dirección del filo puede obtenerse sin problemas por extrapolación a partir de cualquier trozo cuyo tamaño sea mayor que las irregularidades, aunque sea menor que el todo.

Examinemos también la corriente eléctrica que atraviesa un hilo conductor de cobre. Si se la amplifica mucho y se la aplica a los terminales de un altavoz, se nos presenta afectada de un "ruido térmico" muy audible. Y, sin embargo, un amperímetro ordinario indica una intensidad bien definida, que no se tarda mucho en medir exactamente; la causa es que el hilo se encuentra en perfecto equilibrio termodinámico.

En el estudio de los ruidos térmicos suelen intervenir dos términos: la distribución gaussiana y el movimiento browniano. Con



1. EL FILO DE UNA HOJA bien afilada constituye una forma benigna de azar. Examinado al microscopio, el filo es extraordinariamente irregular (*1a*); con una ampliación menor parece ser más regular (*1b y 1c*). El estudio de las fluctuaciones de este tipo queda facilitado por la posibilidad de descomponer la dificultad: podemos empezar estudiando la tendencia general (*en este caso, rectilínea*) y superponer después las fluctuaciones. Por el contrario, el perfil de una costa salvaje de Bretaña no exhibe ninguna regularidad ni tendencia alguna conforme se le va examinando a escalas cada vez más pequeñas (*figuras 2a a 2d*). El estudio de este tipo de formas es más difícil, porque no puede hacerse una descomposición en tendencias y fluctuaciones. Dicho estudio no resulta imposible, merced al carácter "igual" de su irregularidad, traducible en homotecia interna. Las irregularidades de la cuchilla son estacionarias; en cambio las de la costa ciertamente no lo son. No obstante, una curva matemáticamente estacionaria puede ser casi tan irregular como la costa.

mayor generalidad, vamos a dar una definición cuantitiva de la noción de azar "cuasi-browniano", al que yo he calificado con el término vigoroso y colorista de "benigno".

Si digo que mis amigos estadísticos se limitan al estudio del azar benigno, no pretendo hacerles de menos: afrontar el azar siempre entraña dificultades, pero son de las que pertenecen a un registro limitado, que un trabajo intenso ha permitido dominar. Sabido es además que los físicos hace mucho que tienen la impresión de haber domeñado plenamente al azar, por la sencilla razón, a mi modo de ver, de que han podido y han sabido comenzar ocupándose de problemas en los que el azar era benigno y, por tanto, manejable. Cualquier ciencia en la que esto ocurra puede convertirse en ciencia exacta y en ella la afirmación de Gnedenko y Kolmogoroff adquirirá su sentido más estricto.

Mas todo el mundo conoce ciertos dominios del saber, aceptados y definidos desde hace tiempo, que se resisten a la cuantificación. Enseguida nos ocuparemos de tres de ellos. Uno concierne a la geografía, el segundo se refiere a la física, mientras que el más patente afecta a las fluctuaciones económicas y, muy en concreto, a las financieras. Estas últimas tienen como modelo la exactitud de la física estadística, pero lo menos que puede decirse es que tal modelo sigue siendo un ideal muy lejano. Volveremos sobre el tema.

Habiendo estudiado esta temática y algunas otras del mismo jaez, en 1964 me vi obligado a distinguir el azar benigno del que no lo es. El azar no benigno tiene dos causas. En primer lugar, puede ocurrir que ciertas magnitudes verifiquen cumplidamente la regularidad de Gnedenko y Kolmogoroff, pero que carezcan de interés, mientras que las magnitudes importantes experimenten fluctuaciones que no sean benignas. En segundo lugar, puede que haya convergencia hacia la regularidad no aleatoria, pero que sea extraordinariamente lenta.

De la costa de Bretaña a la Bolsa

Apresurémonos a precisar mediante ejemplos estas consideraciones generales. El recuerdo de la hoja bien afilada podría llevar a pensar que el trazado de un recoveco de la costa de Bretaña se compusiera de irregularidades superpuestas a una "tendencia general", representable por un segmento rectilíneo. Sentimos la tentación de extrapolar esta tendencia a toda una línea, pero todos sabemos que tal extrapolación carecería de sentido. Cuando se examina una costa desde mayor altura, las irregularidades "locales" se vuelven despreciables, pero tenemos que afrontar nuevas irregularidades, digamos, "comarcales"; éstas, a su vez, se funden bajo irregularidades que podríamos calificar de "provinciales", y así sucesivamente. Aunque usásemos toda la Bretaña, ninguna extrapolación rectilínea de la dirección de la costa resultaría adecuada.

Nuestro segundo ejemplo de azar benigno se refiere al ruido térmico en un hilo de cobre. Hace treinta y cinco años encontraba yo numerosas situaciones equiparables no benignas; en las finanzas, para empezar, pero también en el estudio de las crecidas del Nilo, de la turbulencia de los fluidos y de diversos ruidos electrónicos de los que no se comprendía gran cosa y a los que, por tanto, se denominaba "anormales". Fue, por otra parte, la lógica interna de mi enfoque (que explicaré dentro de un instante) la que desvió mis trabajos de una "ciencia social" a una ciencia física. En el momento de emprenderlos, tales dominios me eran extraños; fueron investigadores conocidos míos quienes me pidieron auxilio. Todos ellos habían hecho gran acopio de datos y habían realizado grandes esfuerzos para describirlos e interpretarlos por los métodos aceptados. A falta de otras opciones, aplicaban, claro está, los métodos del azar benigno; sus esfuerzos concluyeron en manifiestos fracasos.

Volviendo a las fluctuaciones financieras, ¿dónde se encontrará el equilibrio económico que haga las veces del equilibrio termodinámico "normal"? Me convencí rápidamente de que la noción de equilibrio económico carece de contenido y de que, para describir la variación de precios, no basta con modificar el azar benigno incorporándole innovaciones de detalle. Llegué a la conclusión de que el azar benigno de la mecánica estadística no había supuesto más que un primer estadio del indeterminismo en las ciencias. Era, en consecuencia, indispensable ir más allá del caso benigno (sin modificar el cálculo de probabilidades), pasar a un "segundo estadio" del azar, al que ahora me refiero con otro término pintoresco y vigoroso: azar "salvaje" o brutal. Poco a poco me vi llevado a considerar estos dos azares, no ya como dos estadios sucesivos de un proceso histórico, sino como dos "estados" de características intrínsecamente diferentes.

En un contexto matemático, la idea del azar salvaje se remonta muy atrás, a 1853, habiéndose manifestado ya el temor que suscita en la dureza de una discusión que se produjo entre Cauchy y Bienaymé. El debate concluía, en sustancia, con una exclamación: "No habría calificativos para artesanos tales, que fabricasen instrumentos maculados por errores tan salvajes." La posible existencia de tales fenómenos fue clasificada enseguida como patológica y nadie esperaba encontrárselos en la realidad. Demos, empero, algunos ejemplos.

El más antiguo (y más conocido) está en la crónica de las crecidas anuales del Nilo. La inercia intelectual derivada del estudio de las fluctuaciones benignas asume tácitamente que las medias de las crecidas anuales del Nilo, tomadas sobre períodos sucesivos no demasiado cortos, deberían ser, a grandes rasgos, idénticas. Pero la parábola bíblica de José, hijo de Jacob, la de las "vacas gordas y las vacas flacas", indica, por el contrario, que las medias de dos períodos sucesivos de siete años fueron, al menos en una ocasión, muy diferentes. De acuerdo con datos más modernos y por lo tanto más comprobables, las medias tomadas sobre 17 y sobre 70 años tienden igualmente a separarse una de otra.

Otro ejemplo importante y menos conocido de lo que merecería: las fluctuaciones de intensidad de las corrientes eléctricas que atraviesan láminas metálicas finas, micrófonos de carbón, contactos, semiconductores y toda clase de componentes eléctricos. Si se las amplía mucho, se encuentran perturbadas por "ruidos eléctricos anormales", llamados en $1/f$ (porque la amplitud de cada señal es inversamente proporcional a su frecuencia). Si representamos estos ruidos y la crónica del Nilo sobre gráficos de dimensiones análogas, su aspecto resulta asombrosamente parecido, lo que sirve para subrayar que el contraste entre fluctuaciones benignas y salvajes no es cuestión de escala, sino de estructura.

Apresurémonos a tomar nota de que las distinciones entre "blanco" y "negro" tienen una molesta tendencia a consentir numerosos niveles intermedios de "gris". Y es así como entre los estados benigno y salvaje

pronto aparece una zona intermedia, donde cabe identificar un “tercer estado”. Existen, por ejemplo, situaciones intermedias entre el filo de la navaja y la costa de Bretaña, como las costas occidentales de las Américas, en las que tras las fluctuaciones se aprecia una dirección general. Tenemos un ejemplo matemático de tal convergencia tardía en la distribución *logarítmico-normal*, un lobo disfrazado de cordero. Este azar define un azar lento; conduce, a la larga, a la misma regularidad no aleatoria que el azar benigno, pero lo hace con una lentitud extraordinaria.

Quiero insistir en el hecho de que la introducción de distinciones entre diversos estados de azar constituye una aportación a las matemáticas, pero no las cambia; lo que modifica sobre todo es su interpretación. Distinguir tres estados diferentes del azar me resultó indispensable cuando traté de resolver problemas planteados por la naturaleza recurriendo a determinadas partes de las matemáticas existentes, haciéndolas descender de una generalidad abstracta e indiferenciada a una concreción muy estructurada.

Cómo cuantificar “benigno”, “salvaje” y “lento”

A tal fin veamos un esbozo de la historia de los teoremas de límite del cálculo de probabilidades. Se empezaba por lanzar J veces una moneda que puede caer por igual de cara o de cruz. Pronto se demostró que, cuando J aumenta, la distribución de caras podía simplificarse de una de las dos formas siguientes.

La frecuencia relativa de las veces que la moneda sale cara se acerca cada vez a más a 1/2. Este es el caso más sencillo de la “ley de los grandes números”. La diferencia ponderada entre la frecuencia relativa y 1/2 obedece a una distribución que se aproxima cada vez más a la distribución supuestamente “normal” de Gauss. Tenemos aquí el más sencillo de los “teoremas centrales límites”. Después, pasito a pasito, estos resultados fueron ampliando su dominio de influencia. Al principio conservaron su sentido inicial y llevaron a una visión del indeterminismo en la naturaleza asentado, como el templo de Lamartine, sobre tres “columnas vivas”:

A. La “ley de los grandes números” (también llamada a menudo “teorema ergódico”).

B. La “forma clásica del teorema central límite”. (Es necesario especificar “forma clásica” porque, como veremos, existen otras que se aplican a los casos salvajes.)

C. Y un tercer dato, que se propende a omitir por considerarlo evidente: incluso cuando los “lanzamientos de dados generalizados” no sean independientes, todo cuanto se refiera a un “futuro” suficientemente lejano viene a ser independiente de un “pasado” suficientemente distante.

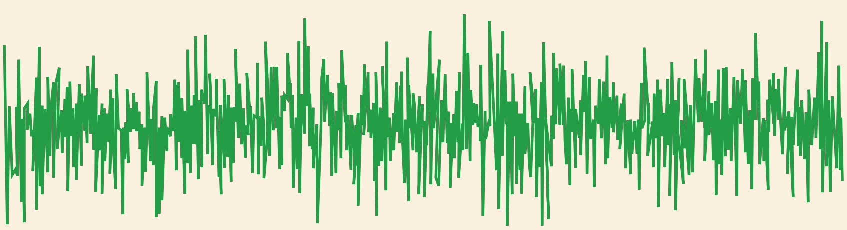
Estos teoremas se han representado en el recuadro 1. Todo cuanto sigue se refiere a su grado de validez. Debemos distinguir tres casos.

El caso benigno. Se puede dotar de un sentido preciso a la noción de que estos teoremas “se aplican rápidamente”. Si así ocurriera en el caso de una fluctuación, se la denominará “benigna”. Se deduce, en general, que las estructuras más interesantes no son estadísticas. Las fluctuaciones benignas han sido descritas por los matemáticos; muchas han sido explicadas por los científicos; los ingenieros han aprendido a manejarlas para volverlas más tolerables. Estos últimos podían evaluar la probabilidad de un acontecimiento futuro basándose en medias, calculadas sobre un número suficientemente grande de acontecimientos pasados.

El caso lento. Puede suceder que “la acción colectiva” conduzca a los teoremas A, B y C, pero que los límites se alcancen de un modo tan lento, que no enseñen gran cosa sobre el tema “colectivo” que encontramos en los problemas científicos concretos. ¿Qué decir entonces de los teoremas A, B y C? Resultaría tranquilizador saber que siguen siendo aplicables. Pero hay que reconocer que se trata de meros espejismos, pues el mundo real es finito. En una onda muy distinta, aunque paralela, el gran economista John Maynard Keynes se burlaba del afecto que sus colegas sentían por el largo plazo recordándoles que, “a largo plazo, todos muertos”.

¿Cuál es, pues, la aplicabilidad práctica de los teoremas de límite? La física macroscópica estudia muestras tan inmensas (el número de Avogadro es el patrón de medida) que no existe dificultad alguna. Pero consideremos,

1. Un ejemplo de azar benigno: el ruido térmico blanco



La teoría de las fluctuaciones benignas reposa sobre los siguientes pilares:

— La ley de los grandes números, también llamada teorema ergódico:

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} X(t)}{T}$$ tiende hacia un límite no aleatorio, que se designa EX, MX o $\langle X \rangle$ según las disciplinas.

— El teorema central límite, llamado clásico o, más correctamente, “gaussiano en $\sqrt{T}$”:

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} [\,X(t) - EX\,]}{\sqrt{T}}$$ tiende hacia un límite gaussiano.

El teorema límite central puede descomponerse en varias afirmaciones:

- $\dfrac{\sum_{t=1}^{T} [\,X(t) - EX\,]}{A(T)}$ posee límite
- Este límite tiene una distribución gaussiana.
- El coeficiente de ponderación es de la forma $A(T) = \sqrt{T}$.
- Por último, un pasado y un futuro suficientemente alejados son asintóticamente independientes.

en cambio, la variable logarítmico-normal, que es, sencillamente, la exponencial de una variable gaussiana. Sus propiedades a largo plazo están presididas por el hecho de que sus momentos (media, varianza, etc.) son todos finitos y se obtienen mediante fórmulas sencillas; ésta es la razón de que la variable logarítmico-normal parezca benigna. Pero a corto o medio plazo todo se desbarata y su comportamiento parece salvaje. Aunque se la trata como si no oliera a chamusquina, es un maravilloso (y peligroso) camaleón.

El caso salvaje. Los síntomas del fracaso completo de la modalidad benigna de la convergencia de las fluctuaciones son dos en número y pueden actuar solos o en combinación: (*a*) la aparición ocasional de enormes desviaciones con respecto a lo que hubiéramos querido considerar como "norma" y (*b*) el hallazgo ocasional de sucesiones muy largas de valores, cada una de las cuales se aparta poco de la norma, tomada por separado, pero cuyas desviaciones en una misma dirección son tan "persistentes" que la media no puede irse formando sino muy lentamente, o no se forma en absoluto. Por alusiones bíblicas de todos conocidas, he propuesto que los ejemplos asociados a estos dos síntomas se denominen "fluctuaciones de Noé" y "fluctuaciones de José", respectivamente. Buen número de sabios conocían ejemplos aislados de fluctuaciones de estos tipos, pero, precisamente porque los consideraban aislados, su existencia permanecía, por así decirlo, en secreto. Mis trabajos proclamaron su importancia y su unidad; el azar salvaje merece considerarse objeto de estudio por derecho propio.

Cabe también preguntarse por qué no se le ha aceptado como tal antes. Puede encontrarse una explicación en una opinión que he oído expresar muchas veces. Hela aquí: si no en teoría, sí por lo menos desde el "punto de vista práctico", basta con que una fluctuación sea "estacionaria", es decir, que obedezca a reglas que permanezcan constantes en el tiempo, para que los tres teoremas *A*, *B* y *C* sean aplicables. Si esto fuera cierto, una fluctuación a la que no se aplicasen los teoremas *A*, *B* y *C* no podría ser estacionaria.

Tomemos la evolución de las cotizaciones bursátiles, que nos dice cómo varía a lo largo del tiempo tal o cual valor. En cuanto se pudo disponer de suficientes datos, se comprobó que no hay indicio alguno de que los teoremas *A*, *B*, *C* sean aplicables.

2. Un ejemplo de azar salvaje: el proceso de Cauchy

Tomemos una sucesión de variables aleatorias independientes $X(t)$, cada una de las cuales tenga una densidad de probabilidad de Cauchy:

$$\frac{1}{\pi\,(1+x^2)}$$

Estas variables tienen la propiedad de que su media,

$$EX = \frac{\sum_{t=1}^{T} X(t)}{T}$$

es también una variable de Cauchy. Tomar la media no tiene efecto alguno, ni resulta aplicable la ley de los grandes números. De hecho, la esperanza matemática es infinita, por lo que la expresión que interviene en el teorema central límite clásico no tiene sentido y el propio teorema no es utilizable sino bajo una forma "generalizada" que altera por completo su contenido. El fracaso de los teoremas habituales se debe en este caso a la presencia frecuente de valores enormemente grandes, ejemplos de las que he denominado "fluctuaciones de Noé."

Los defensores del "punto de vista práctico" sacaron la conclusión de que los ruidos anormales y los cambios de los precios no son estacionarios, es decir, que su mecanismo varía con el tiempo.

Tanto esta actitud como su persistencia me han sorprendido y afligido siempre. Sorprendido, porque los estadísticos que la defienden se resignan con demasiada facilidad a quedar en paro. Afligido, porque veía quintaesenciada esa actitud derrotista que pretende que el estudio de la economía debe contentarse con técnicas probabilísticas ya experimentadas por la física y con las que ésta nos ha familiarizado. Pero resulta que todas estas técnicas se refieren al azar benigno.

Es ahí donde se encuentra el origen de la tentadora idea de que las fluctuaciones se producen necesariamente en torno a una media, que puede interpretarse como punto de equilibrio y que experimenta diversos desplazamientos, o tendencias. Cuando sucede realmente así, la dificultad es descomponible: se procede primero sin tener en cuenta el azar y la incertidumbre no interviene sino en una segunda etapa, a modo de corrección. Es sabido que, en los casos benignos, tal proceder consigue éxitos clamorosos. Pero cuando las fluctuaciones no son benignas, si se confirmase que las fluctuaciones económicas pertenecen realmente a este tipo, cabe esperar que la noción de equilibrio económico se les "escurra por entre los dedos" a quienes deseen asirlo experimentalmente.

En el fondo, esta actitud derrotista parte de un error, a saber, de la idea, ya mentada, de que, a gran escala, lo aleatorio genera una regularidad que es, a todos los efectos, no aleatoria. No es en absoluto así y era cosa sabida en teoría de la probabilidad. Si los científicos no se esperaban el azar salvaje era porque los estudiosos de la probabilidad les habían camuflado tal "salvajismo", exagerándolo unas veces y minimizándolo otras. Quedó exagerado por quienes lo tildaron de "excepcional", de "patológico" y de carente de aplicación. Fue minimizado u ocultado por el movimiento en pro de la generalidad que caracterizaba a todas las ciencias hace treinta años. Lo que solía decirse no era que un teorema, ergódico o central límite tuviese fallos, sino que se decía que podía ser "generalizado", incluso sin cambiarle de nombre.

Pero la "generalización" no es una noción neutra. Llega un momento en que los contenidos de los teoremas centrales límites cambian muy profundamente, perdiendo la significación intuitiva de la que hasta entonces habían sacado partido. Es lamentable que la utilización de la misma palabra suscite la impresión de que la generalidad se obtiene, por así decirlo, a bajo costo y sin verdadero cambio.

Carácter creativo del azar salvaje

Mis trabajos han estado siempre dominados por el carácter fuertemente visual de todo mi pensamiento. Todo el mundo parece saber que es así en el caso del "conjunto de Mandelbrot". Pero la misma característica estaba ya presente en

3. Otro ejemplo de azar salvaje: el ruido en 1/*f*

Los ruidos en los que la amplitud de una frecuencia es inversamente proporcional a esta frecuencia, denominados ruidos en 1/*f*, poseen, al igual que los procesos de Cauchy, la propiedad de que “tomar la media” no tiene ningún efecto sobre ellos. No les son aplicables ni la ley de los grandes números ni el teorema central límite clásico.

El fracaso de los teoremas habituales se debe en este caso a la presencia de “ciclos” muy largos y muy lentos, ejemplos de lo que he denominado “fluctuaciones de José.”

mis investigaciones sobre el azar y me ha enseñado una gran lección. Para enunciarla, comparemos diversos ruidos eléctricos y esa especie de ruidos de los mercados bursátiles que son los cambios de precios. Un ruido térmico, del que ya se ha dicho que es benigno, es un ruido monótono, sin carácter, que puede ser eliminado (“filtrado”) con bastante facilidad. Por el contrario, un gráfico bursátil, un ruido en 1/*f* o cualquier otro ruido salvaje parecen estar cambiando de carácter sin cesar. Rebosan de características de las cuales se podría jurar que tienen cada una algún significado, que es imposible que sean fruto del puro azar. Y así es ciertamente si nos limitamos al azar habitual, vale decir, al azar benigno.

Por el contrario, he encontrado que estas peculiaridades pueden ser “muy fácilmente” efectos de un azar salvaje, observación que inicialmente sorprende. Fue en el contexto de la Bolsa donde tomé conciencia por vez primera de un fenómeno inquietante y magnífico: el azar puro puede tener un aspecto que no podemos negarnos a calificar de creativo. Cambio de tema para afirmar enseguida que es tal creatividad la que, diez años después, nos proporcionó los pseudorrelieves terrestres fractales, ahora clásicos ya, que se han repetido e imitado por doquier.

En vista de lo dicho, cómo no añadir que el azar benigno y el maligno difieren entre sí tanto como puedan diferenciarse un gas y un sólido. Que las reglas que los describan a nivel de máxima abstracción sean generales y comunes para ambos no obsta para que estos dos casos planteen cuestiones muy diferentes. La noción de “tratamiento”, por seguir la analogía médica, ¿debe resignarse a tomar en estos dos casos formas totalmente diferentes?

Mencionaré aquí que, en lugar del calificativo salvaje, al principio había utilizado “maligno”, tomándolo en dos sentidos nada diabólicos. En su sentido médico sugería problemas muy difíciles y para los cuales la noción de tratamiento o de cura no tenía la misma significación que en los casos benignos. El sentido no médico de “maligno” era igualmente sugestivo, pero dejémoslo de lado...

Ciencias y azares

Se comprueba que en todas las ciencias aparecen fluctuaciones no benignas. En las ciencias (por así decirlo) “menos exactas”, se encuentra lo no benigno por doquier, mientras que en las “exactas” la regla parece ser que lo no benigno se concentra en los casos aislados. Los ruidos fundamentales de la física son los ruidos térmicos, que son benignos, mientras que los fenómenos no benignos son “casos especiales”, a los que se gusta considerar carentes de importancia.

Entre las razones no contingentes de que dicha ciencia haya podido llegar a ser exacta debemos contar el hecho de que sus fluctuaciones más importantes resulten ser benignas. Por el contrario, las ciencias donde es el azar no benigno quien rige los ruidos de base corren el riesgo de permanecer largo tiempo en un estado “menos exacto”. La opinión contraria está muy extendida. Postula que las ciencias exactas no han gozado más que de la ventaja accidental de haber tenido más tiempo para desarrollarse, pero este punto de vista me parece contrario a las lecciones de la historia. El problema de la previsión de las crecidas de los ríos y el de la previsión de las posiciones de los planetas se plantearon más o menos simultáneamente en la antigüedad en el seno de la física, pero mientras que el primero se mantuvo en el dominio de la superstición, se hicieron brillantes progresos en el segundo. Pero resulta que era éste el que tenía unas fluctuaciones débiles y, en el límite, despreciables.

Podría ser, pues, que ciertas ciencias fueran intrínsecamente más complejas que otras. Se podría temer que el “grado de exactitud” de una ciencia tuviera, en todos los casos, un límite más o menos alto. Al ir desde las más exactas a las que lo son menos, veríamos ir disminuyendo la proporción de magnitudes interesantes que son regularizadas por la acción colectiva, así como también la proporción de magnitudes regularizables que resultan ser interesantes.

Antes de tratar de resolver cualquier problema que se plantee, sería necesario que retomásemos y profundizásemos en la noción de “problema bien planteado”, formulada hacia 1900 por Jacques Hadamard. Mientras estudiaba diversas ecuaciones de la mecánica, percibió con sorpresa que los efectos de pequeñas variaciones de los datos iniciales no eran siempre limitados, sino que, por el contrario, había casos en que eran considerables. Cuando es así, puede que la “relación de causa a efecto” se conozca perfectamente, sin que tenga nada de aleatorio, y que, sin embargo, resulte prácticamente inútil como método de predicción. Cuando tanto la relación de causa a efecto como las incertidumbres de los datos iniciales son ambas aleatorias, qué sea “bien planteado” suscita nuevos problemas. Pero no es éste el lugar para discutirlos.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE. Benoît Mandelbrot. Nueva York, W. H. Freeman, 1982.

OBJETS FRACTALS. Benoît Mandelbrot, Flammarion; París, 1996.

FRACTALS, HASARDS ET TOURBILLONS. Benoît Mandelbrot, Flammarion; París (en prensa).